التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الدرس الأول

GUEZOURI Aek – lycée Maraval - Oran

ما يجب أن أعرفه حتى أقول : إني استوعبت هذا الدرس

1 – يجب أن أعرف كيفية تحديد جملة ميكانيكية حسب ما يُطلب مني في السؤال .
2 – يجب أن أفرق بين المرجع من جهة ومعلم الفضاءات والأزمنة من جهة أخرى .
3 – يجب أن أعرف كيفية حساب سرعة لحظية لمتحرك في نقطة من مساره بواسطة مخطط .
4 – يجب أن أعرف كيفية حساب تسارع لحظي لمتحرك بواسطة التغير في شعاع السرعة .
5 – يجب أن أعرف القوانين الثلاثة لنيوتن وكيفية تطبيقها على الجُمَل الميكانيكية .
6 – يجب أن أعرف ما هي القوى التي تجعل القمر الصناعي مستقرا على مداره حول الأرض .
7 – يجب أن أعرف القوانين الثلاثة لكبلر .

ملخص الدرس

القوى الداخلية والقوى الخارجية في جملة

القوى الداخلية في جملة ميكانيكية تنعدم مثنى مثنى ، وتبقى القوى الخارجية هي المسؤولة عن حركة هذه الجملة .

المعلم والمرجع : حجرة المخبر مرجع ندرس بالنسبة له حركة سقوط كرية ، هذا لا يكفي لدراسة عناصر الحركة ، لهذا نزوّد المرجع بمعلم ، مثلا $(O,\vec{k})$. ، ثم نختار لحظة نعتبرها مبدأ للزمن .

المرجع السطحي أرضي : نقطة من سطح الأرض (المخبر مثلا) : ننسب إليه الحركات على الأرض والتي لا تدوم كثيرا .

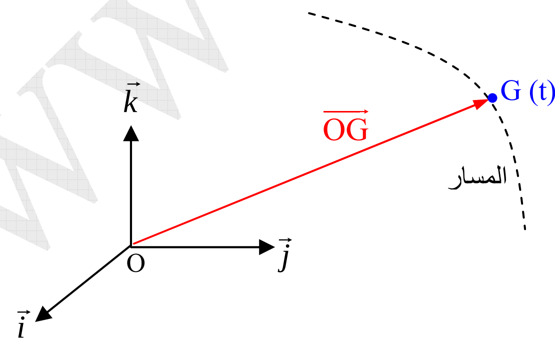
المرجع المركزي أرضي : مركز الأرض مزود بمعلم محاوره متجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة .

المرجع المركزي شمسي : مركز الشمس مزود بمعلم محاوره متجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة

عناصر الحركة :

شعاع الموضع : هو الشعاع $\overrightarrow{OG}$ الذي يجمع بين مبدأ الإحداثيات وموضع مركز عطالة الجسم في اللحظة (t) .

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



شعاع السرعة : هو مشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$

وهو مماس للمسار في كل لحظة .

G
$\vec{v}$
$\vec{a}$

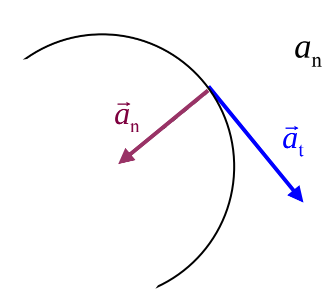
شعاع التسارع : هو مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}$ ، وهو المشتق الثاني لشعاع الموضع بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OG}}{\mathrm{dt}^2}$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \qquad \vec{v} = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \qquad \vec{a} = \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

التسارع المماسي والناظمي :

في معلم فرينى (Frenet) التسارع المماسي $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{dt}}$ ، والتسارع الناظمي (المركزي) $a_n = \dfrac{v^2}{\mathrm{R}}$



طبيعة الحركة :

$\vec{a} \times \vec{v} > 0$: الحركة متسارعة

$\vec{a} \times \vec{v} < 0$: الحركة متباطئة

$\vec{a} \times \vec{v} = 0$: الحركة مستقيمة منتظمة إذا كان $\vec{a} = 0$ ، ودائرية منتظمة إذا كان $\vec{a} \perp \vec{v}$

الحركة الدائرية المنتظمة

$\alpha = \omega t$

$\omega = \dfrac{v}{R}$

$a = a_n$

$a_t = 0$

$v = Cst\ ;\ \vec{v} \neq Cst$

المعادلة الزمنية :

$\alpha = \omega t + \alpha_0$

الحركة المستقيمة المنتظمة

$d_{A\to B} = vt$

$v = Cst$

$a_t = 0$

$a_n = 0$

المعادلة الزمنية :

$x = vt + x_0$

الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

$d_{A\to B} = \dfrac{1}{2}at^2 + v_A t$

$v_B - v_A = at$

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$

$a = a_t$

$a_n = 0$

المعادلة الزمنية :

$x = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

قوانين نيوتن : (نقتصر على الملخص فقط)

القانون الأول : في معلم غاليلي إذا كان شعاع سرعة مركز عطالة جملة ثابتا ، فإن مجموع القوى الخارجية المؤثرة على الجملة يكون معدوما . والعكس كذلك صحيح $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_G = Cst$

القانون الثاني :

في معلم غاليلي يكون مجموع القوى الخارجية المؤثرة على جملة كتلتها m متناسبا في كل لحظة مع تسارع الجملة ، أي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

القانون الثالث :

إذا أثرت جملة A بفعل ميكانيكي على جملة B مُنَمذج بقوة $\vec{F}_{A/B}$ ، فإن الجملة B تؤثر في نفس الوقت على الجملة A بفعل مُنَمذج بقوة $\vec{F}_{B/A}$ ، بحيث يكون هذان الفعلان متعاكسين ومربوطين بالعلاقة : $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$

حركة الكواكب والأقمار الصناعية

- يدور كوكب في مسار دائري (فرضا) حول الشمس بسرعة $v = \sqrt{G\dfrac{M_s}{r}}$

G : ثابت الجذب العام ، M_s كتلة الشمس ، r البعد بين مركزي الشمس والكوكب .

- يدور قمر صناعي في مسار دائري (فرضا) حول الأرض بسرعة $v = \sqrt{G\dfrac{M_T}{r}}$

G : ثابت الجذب العام ، M_T كتلة الأرض ، r البعد بين مركز الأرض والقمر الصناعي .

زمن دورة (الدور) : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$ ، M : كتلة الشمس أو الأرض .

قوانين كبلر

القانون الأول : في المرجع الشمسي مركزي تتحرك الكواكب في مدارات إهليليجية حول الكوكب الجاذب بحيث يكون هذا الأخير أحد محرقيها .

تكملة حديثة للقانون الأول : في المرجع الأرضي مركزي تدور الأقمار الصناعية في مدارات إهليليجية أحد محرقيها مركز الأرض .

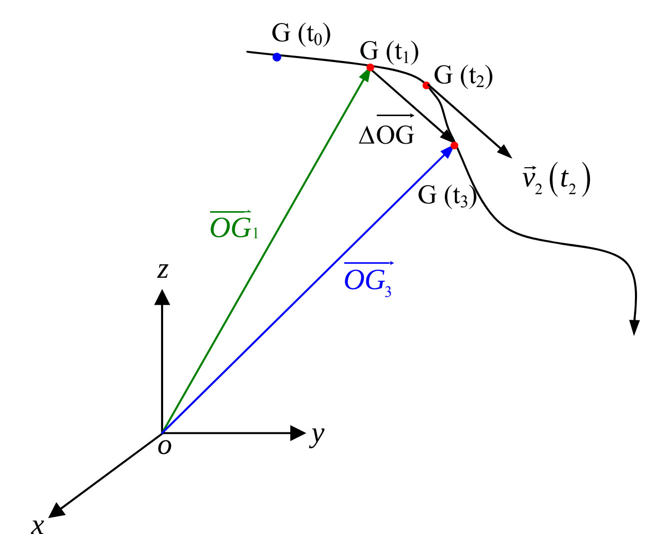
القانون الثاني : (قانون المساحات) : يمسح المستقيم الواصل بين مركز الكوكب السيار ومركز الكوكب الجاذب مساحات متساوية في مُدَد زمنية متساوية .

القانون الثالث : في مرجع شمسي مركزي ، تكون النسبة بين مربعات أدوار الكواكب ومكعبات أنصاف المحاور الكبيرة لمداراتها ، دائما ثابتة .

لا تتعلّق هذه النسبة إلا بالكوكب أو النجم الجاذب . $\dfrac{T^2}{a^3} = k$

I - الحركات

1 - شعاع السرعة اللحظية



شعاع السرعة في اللحظة t_2 هو $\vec{v}_2 = \dfrac{\vec{OG}_3 - \vec{OG}_1}{t_3 - t_1}$

شعاع السرعة يكون موازيا لشعاع الانتقال $\Delta\vec{OG} = \vec{OG}_3 - \vec{OG}_1$

يكون تحديد $\vec{v}_2$ بأكثر دقة كلما اقتربت t_3 من t_1 ، وبالتالي :

شعاع السرعة اللحظية هو المشتق بالنسبة للزمن لشعاع الموضع $\vec{OG}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OG}}{dt}$$

مثال : يتحرك جسم نعتبره نقطة في معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، تُعطى إحداثيات المتحرك في كل لحظة t كما يلي :

$x = 3\,t - 1$ ، $y = 2\,t^2 - 1$ ، $z = t^2 + 2\,t$

1 – اكتب عبارة شعاع الموضع ، ثم عيّن وضعية المتحرك في اللحظة $t = 2$ s

2 – اكتب عبارة شعاع السرعة ، ثم احسب طويلة السرعة في اللحظة $t = 1$ s

الحل :

1 - شعاع الموضع هو : $\vec{OG} = (3t-1)\vec{i} + (2t^2-1)\vec{j} + (t^2+2t)\vec{k}$

في اللحظة $t = 2$ s يكون $\vec{OG} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}$

2 – شعاع السرعة :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OG}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4t\,\vec{j} + (2t+2)\vec{k}$$

عند $t = 1$ s يكون شعاع السرعة $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\,\vec{j} + 4\vec{k}$ ، وطويلته $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{9+16+16} = 6{,}4\ m/s$

2 - شعـاع التسارع اللحظي :

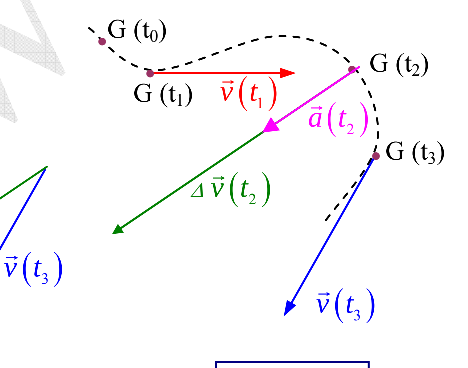


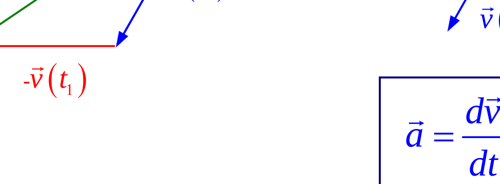
يُعبّر شعاع التسارع عن تغير شعاع السرعة خلال الزمن .

شعاع التسارع محمول على شعاع التغير في السرعة $\Delta\vec{v}$.

شعاع التسارع في اللحظة t_2 هو :

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{t_3 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$



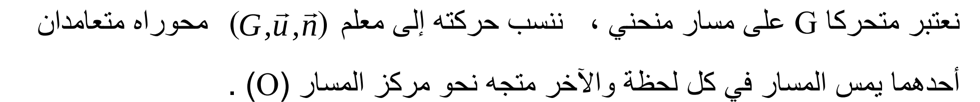


كلما اقترب t_3 من t_1 كلما كان تحديد شعاع التسارع دقيقا أكثر .

عندما ينتهي t_3 نحو t_1 يصبح $\vec{a}$ مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

3 - التسارع المماسي والتسارع الناظمي (المركزي)



نعتبر متحركا G على مسار منحنى ، ننسب حركته إلى معلم $(G,\vec{u},\vec{n})$ محوراه متعامدان أحدهما يمس المسار في كل لحظة والآخر متجه نحو مركز المسار (O) .

شعاع السرعة يكون دائما محمولا على المماس ، ومنه نكتب :

$\vec{v} = v\,\vec{u}$ ، وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن :

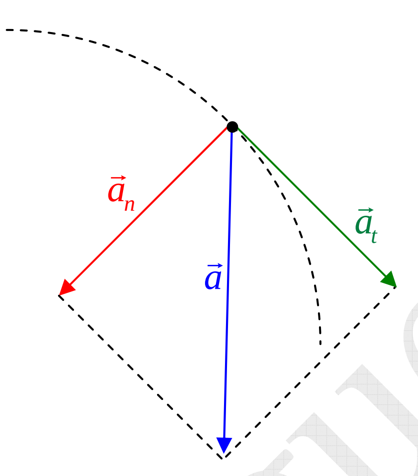
$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\frac{d\vec{u}}{dt}$ (شعاع الوحدة $\vec{u}$ متغير المنحى)

ومنه التسارع $\vec{a}$ عبارة عن تسارعين :

التسارع المماسي محمول على المماس : $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}$ طويلته $a_t = \frac{dv}{dt}$

التسارع الناظمي متجه نحو المركز (فيسمى المركزي) $\vec{a}_n = v\frac{d\vec{u}}{dt}$ ، طويلته تُقبل بدون برهان $a_n = \frac{v^2}{R}$.

حيث R هو نصف قطر المسار .



تحليل بعدي لعبارة التسارع : $[a] = \frac{\frac{[D]}{[T]}}{[T]} = \frac{[D]}{[T]^2} = [D][T]^{-2}$ ،

ولهذا نقيس التسارع بـ $m.s^{-2}$

الحركات المستقيمة

تكون هذه الحركات وفق محور واحد ، إما Ox أو Oy أو Oz .

التسارع النـاظمي لهذه الحركات معدوم $a_n = 0$ ، لأن المستقيم يُعتبر دائرة ! نصف قطرها ما لا نهـاية .

1 - الحركة المستقيمة المنتظمة

المعادلة الزمنية لهذه الحركة هي : $x = vt + x_0$ ، حيث :

x_0 : الفاصلة التي شغلها المتحرك في اللحظة $t = 0$ (الفاصلة الابتدائية) .

t : اللحظة الزمنية التي يشغل فيه المتحرك الفاصلة x .

من أجل حساب المسـافة d التي يقطعهـا المتحرك في مدة زمنية t ، نكتب $d = vt$.

مثال : اكتب المعادلة الزمنية لمتحرك يقوم بحركة مستقيمة منتظمة ، حيث يشغل الفاصلة $x_1 = 3m$ في اللحظة $t_1 = 2s$ ، ويشغل الفاصلة $x_2 = -5m$ في اللحظة $t_2 = 3s$.

الحل : المعادلة الزمنية هي $x = vt + x_0$. يجب أن نحسب قيمتي السرعة v والفاصلة الابتدائية x_0 .

المطلوب منّا رياضيا معادلة مستقيم يمر بالنقطتين $(2s\ ;\ 3m)$ و $(3s\ ;\ -5m)$

$\begin{cases} 3 = 2v + x_0 \\ -5 = 3v + x_0 \end{cases}$ بحل هذه الجملة نجد $v = -8\,m/s$ و $x_0 = 19\,m$ ، وبالتالي تكون المعـادلة الزمنية $x = -8t + 19$

ملاحظة : $v = -8\,m/s$ لا يعني أن السرعة سالبة ، بل يقصد أن المتحرك له سرعة $v = 8\,m/s$ ، لكنه يتحرك في الجهة السالبة للمحور الموجه .

2 - الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

المعادلة الزمنية لهذه الحركة $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ (1) ، حيث v_0 هي السرعة في اللحظة $t = 0$ (السرعة الابتدائية)

سرعة الحركة $v = \frac{dx}{dt} = at + v_0$ (2)

لو استخرجنا عبارة الزمن من العلاقة (2) وعوّضناها في العبارة (1) نجد العبارة $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

$x - x_0$ هي المسافة المقطوعة d بين الوضعين اللذين كانت فيهما سرعة التحرك v_0 ثم أصبحت v . أما بصفة عامة ، إذا كانت سرعة المتحرّك في النقطة A هي v_A ، ثم أصبحت سرعته في النقطة B v_B ، يكون قد قطع المسافة d ، حيث :

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$ ، المسافة $d = AB$.

يمكن حساب المسافة المقطوعة من العلاقة $d = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ ، حيث t هي المدة الزمنية المستغرقة بين A و B .

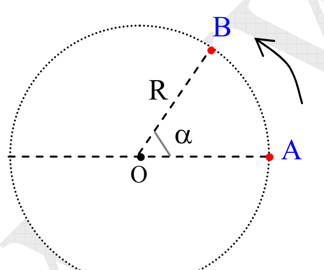
كما يمكن حساب المدّة الزمنية التي يستغرقها بين A و B من العلاقة $t = \frac{v_B - v_A}{a}$

ملاحظة : إذا اعتبرنا المتحرك يتحرك دائما في الجهة الموجبة للمحور الموجه (وهذا الذي نصادفه عادة) ، هذا يعني أن السرعة موجبة . فإذا كان :

- التسارع **موجبا** تكون الحركة متسارعة بانتظام .
- التسارع **سالبا** تكون الحركة متباطئة بانتظام .

الحركة الدائرية المنتظمة

المسار دائري ، تسارعها المماسي معدوم لأنه مشتق السرعة بالنسبة للزمن ، ونعلم أن طويلة السرعة ثابتة .



تسارع هذه الحركة هو التسارع الناظمي فقط $a_n = \frac{v^2}{R}$.

عندما يتحرك جسم على محيط دائرة ، مثلا من A إلى B ، تكون المسافة المقطوعة AB والتي هي عبارة قوس $\widehat{S} = AB = vt$ ، حيث t هي المدة الزمنية اللازمة لقطع هذا القوس .

لو قسمنا طرفي العلاقة على نصف قطر الدائرة R ، نجد $\frac{S}{R} = \frac{v}{R}t$

نعلم أن $\frac{S}{R}$ هو الزاوية α ، أما $\frac{v}{R}$ تسمى السرعة الزاوية للحركة ، حيث $\omega = \frac{v}{R}$

وحدة السرعة الزاوية هي راديان / الثانية ، أي $rd.s^{-1}$.

دور الحركة : هو الزمن اللازم لدورة تـامة ، نرمز له بـ T ، حيث $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ، أي الزاوية الموافقة لمحيط الدائرة مقسومة على الزمن اللازم لقطع هذا المحيط والذي يمثل الدور .

من أجل إيجاد الزاوية α التي يمسحها المتحرك في المدّة الزمنية t نستعمل العلاقة $\alpha = \omega t$.

II - تطبيق قوانين نيوتن على الحركات

1 - القوى الداخلية والخارجية

القوى الداخلية في جملة ميكانيكية تنعدم مثنى مثنى ، وتبقى القوى الخارجية هي المسؤولة عن حركة هذه الجملة .

الجملة (سيارة : V) القوى الخارجية هي :

$\vec{F}$ ، $\vec{F}_{r/v}$ ، $\vec{T}_{c/v}$ ، $\vec{f}$ ، $\vec{P}$

لا توجد قوى داخلية ممثلة في الشكل .

الجملة (سيارة + عربة : C) القوى الخارجية هي :

$\vec{F}$ ، $\vec{F}_{r/v}$ ، $\vec{F}_{r/c}$ ، $\vec{f}$ ، $\vec{f}'$ ، $\vec{P}$ ، $\vec{P}'$ ، القوى الداخلية : $\vec{T}_{c/v}$ ، $\vec{T}_{v/c}$



2 – دراسة مثالين

المثال – 1

نعتبر الاحتكاك على المستوي المائل (L) مكافئا لقوة ثابتة شدتها $f = 0{,}1\ \text{N}$ ولها حامل شعاع السرعة ومعاكسة له.

نترك جسما صلبا S كتلته $m = 100\ \text{g}$ ينزل بدون سرعة ابتدائية من النقطة A على خط الميل الأعظم لمستو مائل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 30°$. نهمل مقاومة الهواء ونعتبر AB خطا مستقيما .

نعتبر الجسم S نقطة مادية .

1 – مثّل كل القوى المؤثرة على الجسم بين A و B .

2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بيّن أن حركة S متسارعة بانتظام ، ثم احسب تسارعه .

3 – احسب تسارع S بين A و B بتطبيق نظرية الطاقة الحركية .

4 – نعتبر المستوي الأفقي BC (L') أملس جدّا .

أ) مثّل القوى المؤثرة على S بين B و C .

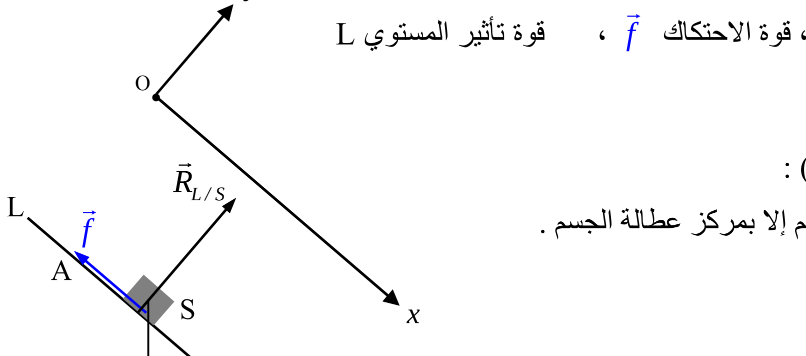
ب) احسب سرعة S عند النقطة C علما أن المسافة AB = 70 cm .

5 – باعتبار قوة الاحتكاك على BC ثابتة شدتها $f' = 0{,}15\ N$ ومعاكسة لشعاع السرعة .

نعيد ترك الجسم S في النقطة A ، كم يجب أن تكون المسافة BC لكي يتوقف الجسم في النقطة C .

نأخذ g = 10 S.I

الحل :



1 – القوى المؤثرة على S بين A و B : قوة الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$ ، قوة تأثير المستوي L على الجسم S $\vec{R}_{L/S}$.

2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن (نظرية مركز العطالة) :

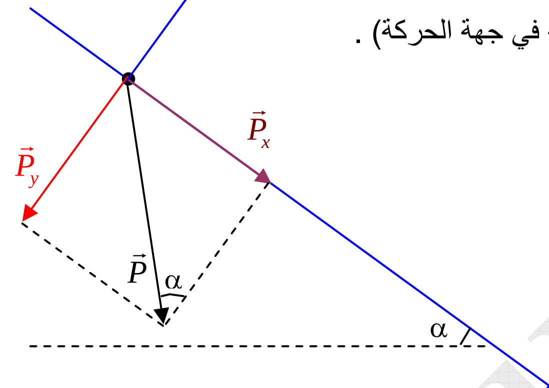
نسمي هذا القانون كذلك نظرية مركز العطالة ، لأنه لا يهتم إلا بمركز عطالة الجسم .

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R}_{L/S} + \vec{f} = m\,\vec{a} \qquad (1)$$

نختار معلما لندرس فيه حركة الجسم S ، و نعتبر مدة الحركة قصيرة حتى يتسنى لنا إعتبار هذا المعلم غاليليا .

ليكن هذا المعلم هو $(Ox\,,Oy)$. نهتم فقط بالمحور Ox ، لأن الحركة تحدث فقط وفق هذا المحور .



نسقط العلاقة الشعاعية (1) على هذا المحور :

لدينا مسقط قوة الثقل على المحور Ox هو $P_x = P\sin\alpha$ (المسقط موجب لأنه في جهة الحركة) .

مسقط $\vec{R}_{L/S}$ معدوم لأن هذه القوة عمودية على Ox .

مسقط $\vec{f}$ سالب لأن هذه القوة معاكسة للمحور Ox .

a : هي القيمة الجبرية للتسارع ، يمكن أن تكون موجبة ويمكن أن تكون سالبة .

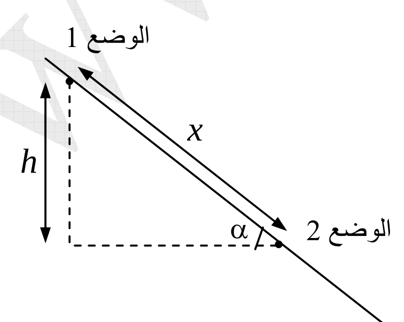
وبالتالي نكتب : $P\sin\alpha - f = m\,a$

ومنه : $a = \dfrac{P\sin\alpha - f}{m}$. نلاحظ أن المقادير : P ، α ، f ، m كلها ثابتة أثناء الحركة ، إذن التسارع ثابت ، وبالتالي حركة الجسم S متغيّرة بانتظـام .

$$a = \frac{0{,}1\times 10\sin 30 - 0{,}1}{0{,}1} = 4\ m.s^{-2}$$

3 – بتطبيق نظرية الطاقة الحركية :

نعتبر في اللحظة t أن المسافة التي يكون قد قطعها الجسم S هي $Ox = x$ (اعتبرنا الجسم نقطة مادية ، أي ليس له أبعاد ، لكن هذه النقطة لها كتلة هي كتلة الجسم S) .



في اللحظة t تكون سرعة الجسم هي v .

نظرية الطاقة الحركية (السنة الثانية) :

$$E_{C_2} - E_{C_1} = \Delta E_c = \sum W\left(F_{ext+int}\right) \text{ ،}$$

التغيّر في الطاقة الحركية يساوي مجموع أعمال القوى الداخلية والخارجية .

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh - fx$$

من المعطيات $v_1 = 0$ ، ولدينا في الشكل المقابل $h = x\sin\alpha$ ، وبالتالي :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\ x\sin\alpha - fx \qquad (2)$$

عمل $\vec{R}_{L/S}$ معدوم لأن هذه القوة عمودية على الانتقال .

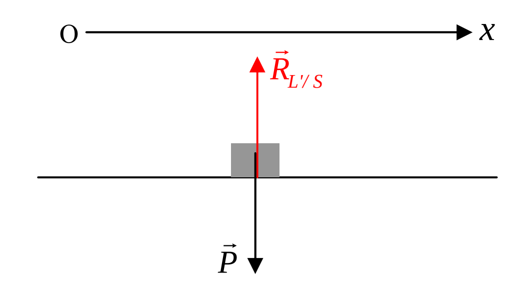
عمل $\vec{f}$ سالب لأنه مقاوم (جهة القوة عكس الانتقال) .

نشتق طرفي العلاقة (2) بالنسبة للزمن : $mva = mg\ v\sin\alpha - fv$ ، وبالتالي : $a = \dfrac{mg\sin\alpha - f}{m}$

4 -

أ) تمثيل القوى على المستوي الأفقي

ب) لكي نحسب سرعة الجسم يجب أولا أن نعرف طبيعة الحركة .



بتطبيق نظرية مركز العطالة :

$\vec{P} + \vec{R}_{L'/S} = m\vec{a}$ ، وباسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحور Ox :

$0 + 0 = ma$ ، ومنه $a = 0$

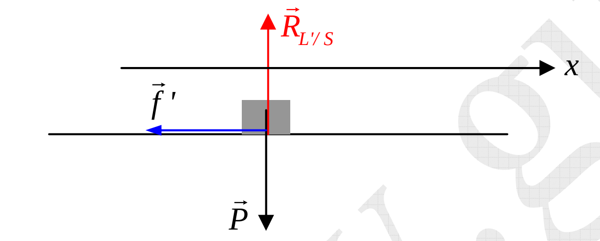
سرعة الجسم غير معدومة وتسارعه معدوم ، إذن فهو في حركة ، وحركته هذه تكون منتظمة .

ما دامت الحركة منتظمة ابتداء من النقطة B ، فإن سرعة الجسم في النقطة C هي نفسها السرعة في النقطة B .

حساب السرعة في النقطة B :

$v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB)$ ، ولدينا $v_A = 0$ ، وبالتالي : $v_B^2 = 2\times4\times0{,}70 = 5{,}6$ ، ومنه $v_B = 2{,}36\ m/s = v_C$

5 - بتطبيق نظرية مركز العطالة على الجسم S



$\vec{P} + \vec{R}_{L'/S} + \vec{f}' = m\ \vec{a}'$ ، وباسقاط هذه العلاقة على المحور Ox

$-f' = m\ a'$ ، وبالتالي $a' = -\dfrac{f'}{m}$

التسارع ثابت إذن الحركة متغيّرة بانتظام .

ملاحظة : نعلم أن الحركة تكون متسارعة بانتظام إذا كان $\vec{v}.\ \vec{a} > 0$ أو $v.\ a_t > 0$

متباطئة بانتظام إذا كان $\vec{v}.\ \vec{a} < 0$ أو $v.\ a_t < 0$

نحن لدينا في هذا المثال طويلة السرعة موجبة لأن الجسم S يتحرك في الجهة الموجبة للمحور ، أما طويلة التسارع (والذي يمثل التسارع المماسي لأن الحركة مستقيمة ، تسارعها الناظمي معدوم) ، وجدناها سالبة ، لأن f موجبة و m موجبة .

وبالتالي يكون لدينا $v.\ a_t < 0$ ، إذن الحركة متباطئة بانتظام .

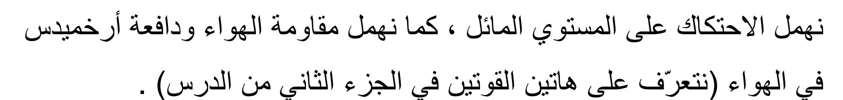
لكي نحسب المسافة BC نطبق العلاقة $v_C^2 - v_B^2 = 2a'(BC) \qquad (3)$

ولدينا $v_B = 2{,}36$ m/s ، $v_C = 0$ (توقف الجسم)

$a' = -\dfrac{f'}{m} = -\dfrac{0{,}15}{0{,}1} = -1{,}5\ m.s^{-2}$ ، وبالتعويض في العلاقة (3) : $BC = \dfrac{-v_B^2}{2a'} = \dfrac{-5{,}6}{-2\times1{,}5} = 1{,}86\ m$

المثال 2

تتكوّن جملة ميكانيكية من جسمين صلبين S_1 و S_2 موصولين بخيط خفيف جدا يمر على بكرة نعتبر كتلتها مهملة . يمكن للجسم S_1 أن ينسحب على مستو مائل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 30°$.



نهمل الاحتكاك على المستوي المائل ، كما نهمل مقاومة الهواء ودافعة أرخميدس في الهواء (نتعرّف على هاتين القوتين في الجزء الثاني من الدرس) .

كتلة الجسم S_1 : $M_1 = 300\ g$ وكتلة الجسم S_2 : $M_2 = 200\ g$.

نأخذ $g = 10\ u.i$.

1 – عيّن جهة الحركة .

2 – احسب تسارع S_1 و S_2 .

الحل :

1 – لتعيين جهة الحركة نقارن بين $P_2 = M_2\, g$ و $P_1 \sin\alpha = M_1 g \sin\alpha$

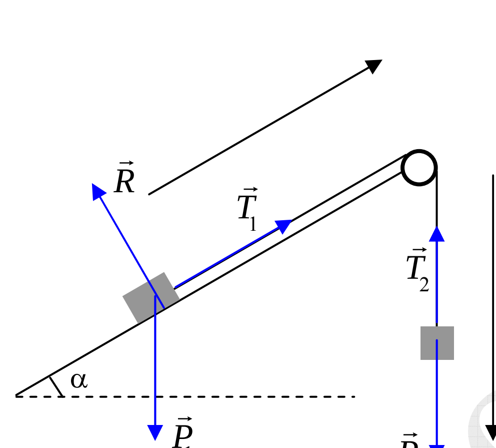
$P_2 = 0{,}2 \times 10 = 2\ N$ ، $P_1 \sin\alpha = 0{,}3 \times 10 \times 0{,}5 = 1{,}5\ N$.

بما أن $P_2 > P_1 \sin\alpha$ ، إذن جهة الحركة تكون نحو اليمين ، أي في جهة S_2 .

2 - تسارع الجسم S_1 هو نفسه تسارع الجسم S_2 لأن الجملة مترابطة .

نمثل القوى المؤثرة على كل جسم .

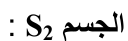
بتطبيق نظرية مركز العطالة على كل جسم :



الجسم S_1 :

$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{R} = M_1 \vec{a}_1$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الموازي للمستوي المائل :

$$T_1 - P_1 \sin\alpha = M_1 a_1 \qquad (1)$$



الجسم S_2 :

$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = M_2 \vec{a}_2$ ، وباسقاط هذه العلاقة على المحور الشاقولي :

$$P_2 - T_2 = M_2 a_2 \qquad (2)$$

عندما تكون كتلة البكرة مهملة يكون $T_1 = T_2$ ، وبجمع المعادلتين (1) و (2) طرفا لطرف ، حيث أن $a_1 = a_2 = a$

نجد تسارع كل من الجسم S_1 و S_2 : $a = \dfrac{P_2 - P_1 \sin\alpha}{M_1 + M_2} = \dfrac{2 - 1{,}5}{0{,}5} = 1\ m.s^{-2}$

حذار : $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$ و $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$ ، لكن $T_1 = T_2$ و $a_1 = a_2$

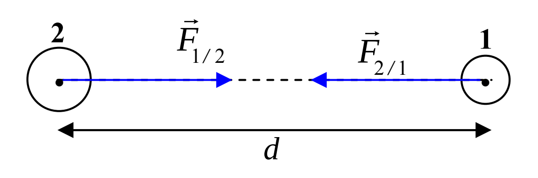
III - حركة قمر صناعي حول الأرض (تطبيق للحركة الدائرية المنتظمة)

ننسب حركة الأقمار الصناعية إلى المرجع الأرضي مركزي .

1 – قانون الجذب العام :

يتجاذب جسمان كتلتاهما M_1 و M_2 البعد بينهما d بقوة $F_{1/2} = F_{2/1} = G\dfrac{M_1 M_2}{d^2}$

حيث G هو ثابت الجذب العام ، أو نسميه الثابت الكوني وقيمته $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$



2 – القوى التي يخضع لها القمر الصناعي

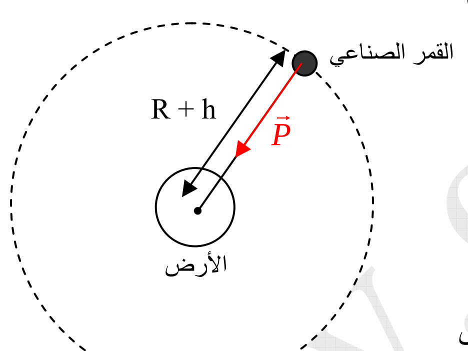
يُحمل القمر الصناعي بواسطة مركبة فضائية إلى ارتفاع محدّد عن سطح الأرض ، ثم تُعطى له سرعة تمكنه من البقاء على مداره .

حينذاك يكون خاضعا لقوتين متعاكستين مباشرة ، هما قوة جذبه نحو مركز الأرض (ثقله) وقوّة الطرد المركزي الناتجة عن سرعته الكبيرة .

(لو فرضنا جدلا أن القمر الصناعي توقف عن الحركة ، سيسقط على سطح الأرض ، ولو أعطيت له سرعة أكبر من المحدّدة له يغادر مداره نحو كوكب آخر).

قوة الطرد المركزي هي قوة وهمية ، أي أنها تظهر فقط أثناء الدوران .

(تشعر وأنت راكب في السيارة بقوة تحاول طردك نحو الخارج عندما تعبر السيارة منعطفا)



3 - سرعة القمر الصناعي

حركة القمر الصناعي دائرية منتظمة ، أي تسارعه ناظمي ، فالقوة التي تجذبه نحو الأرض تكون مركزية ، أي $F = m a_n$ ، وبالتالي

$$G\frac{m M_T}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h} \quad (1)$$

حيث m : كتلة القمر الصناعي ، M_T : كتلة الأرض ، R : نصف قطر الأرض ، h : الارتفاع بين القمر الصناعي وسطح الأرض .

من العلاقة (1) نستنتج

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R+h}}$$

4 - دور القمر الصناعي : هو الزمن اللازم لكي يقوم القمر الصناعي بدور كاملة .

لدينا : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\dfrac{v}{R+h}} = \dfrac{2\pi(R+h)}{v}$ ، وباستعمال عبارة السرعة نجد :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{G M_T}}$$

5 - القمر الصناعي المستقر أرضيا

تُستعمل مثل هذه الأقمار في البث التلفزيوني ، وهي الأقمار التي تدور في جهة دوران الأرض أي شمالا ، ودورها يساوي دور الأرض . في هذه الحالة يبقى دائما القمر فوق نفس النقطة من خط الإستواء أثناء دورانه .

مثال : على أي ارتفاع يجب وضع قمر صناعي مستقر أرضيا .

نصف قطر الأرض المتوسط R = 6400 km . كتلة الأرض $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg

الحل : لدينا $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM_T}}$ ، حيث T = 24 h = 24 × 3600 = 86400 s .

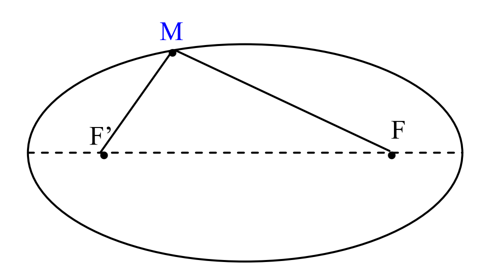
بتربيع طرفي العلاقة : $T^2 = 4\pi^2\frac{(R+h)^3}{GM_T}$ ، ومنه $(R+h)^3 = \frac{T^2GM_T}{4\pi^2}$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2GM_T}{4\pi^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{(86400)^2 \times 6,67\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{40}} - 64\times10^5 \approx 36000\ km$$

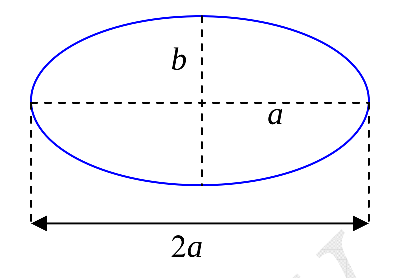
6 - قوانين كبلر

1 - القطع الناقص : هو شكل هندسي تحقق نقاطه M العلاقة MF + MF' = 2 a

F ، 'F هما محرقا القطع الناقص و a هو نصف محوره الأكبر ، b : هو نصف المحور الأصغر



القطع الناقص ومحرقاه F و 'F



المحوران الأكبر والأصغر للقطع الناقص

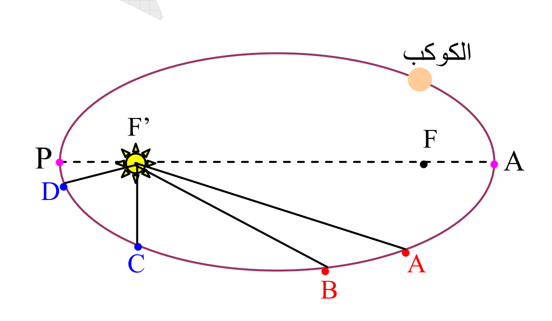
2 - القانون الأول

تدور الكواكب حول الشمس في مدارات إهليليجية ، بحيث يكون أحد محرقيها هو مركز الشمس ، وذلك في المرجع الشمسي مركزي ونفس الشيء بالنسبة للأقمار الصناعية حول الأرض بحيث يكون مركز الأرض هو أحد محرقي مساراتها الإهليليجية ، وذلك في المرجع الأرضي المركزي .

ملاحظة : نعتبر أحيانا هذه المسارات دائرية .

3 - القانون الثاني (قانون المساحات)

المساحات التي يمسحها المستقيم الواصل بين مركز الكوكب ومركز الشمس تكون متساوية في مُدد زمنية متساوية . أي أن سرعة الكوكب تزداد عندما يقترب من الشمس وتتناقص عندما يبتعد عنه .



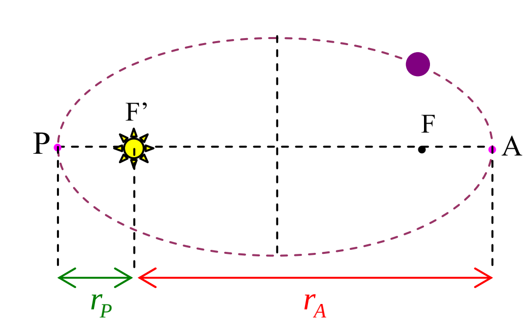
المساحتان F'AB و F'CD متساويتان إذا كانت المدة التي يستغرقها الكوكب من A إلى B تساوي المدة التي يستغرقها من C إلىD .
سرعة الكوكب تكون عظمى بجوار النقطة P (تسمى هذه النقطة نقطة الرأس الأقرب) ، وتكون سرعته صغرى بجوار النقطة A (تسمى هذه النقطة نقطة الرأس الأبعد وتسمى كذلك الأوْج) .

4 - القانون الثالث

في مرجع شمسي مركزي تكون النسبة بين مربع دور الكوكب ومكعّب نصف المحور الأكبر للمسار دائما ثابتة ، أي أن بالنسبة لكوكبين سيارين مختلفين ، دور الأول T_1 ودور الثاني T_2 ، يكون دائما :

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = k$$

ونفس الشيء بالنسبة للأقمار الصناعية حول الأرض في المعلم الأرضي مركزي .



في هذه العلاقة البعد a هو $a = \frac{r_P + r_A}{2}$ (انظر للشكل المقابل)

إذا اعتبرنا المسار دائريا يكون : $\frac{T^2}{(R+h)^3} = k$ ،

حيث h هو بعد القمر الصناعي عن سطح الأرض و R هو نصف قطر الأرض .